



TITLE:

古典ハミルトン系におけるゆらぎ
の統計性:局所リヤプノフ指数のゆ
らぎ(6)数理科学的考察・量子情報
理論、生物学,京大基研短期研究会
量子力学とカオス-基礎的問題から
ナノサイエンスまで-,研究会報告)

AUTHOR(S):

今井, 邦俊; 島田, 一平

CITATION:

今井, 邦俊 ...[et al]. 古典ハミルトン系におけるゆらぎの統計性:局所リヤプノフ指数のゆ
らぎ(6)数理科学的考察・量子情報理論、生物学,京大基研短期研究会 量子力学とカオス-
基礎的問題からナノサイエンスまで-,研究会報告). 物性研究 2004, 82(5): 810-811

ISSUE DATE:

2004-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97836>

RIGHT:

古典ハミルトン系におけるゆらぎの統計性

—局所リヤプノフ指数のゆらぎ—

日本大学大学院理工学研究科 * 日本大学量子科学研究所

今井邦俊¹ * 島田一平²

1. はじめに

ハミルトン力学系の運動が多重周期的な運動とカオス的な運動に分類されることはよく知られている。さらに、カオスと多重周期的な運動との間で、運動が遷移するよどみ運動も観測される¹⁾。このよどみ運動はハミルトン系特有の運動である。今回はよどみ運動の性質を理解するために、スタンダードマップにおける局所リヤプノフ指数のゆらぎに注目し、その分布関数を調べた。一方で、株価の変動や DNA の塩基配列、蛋白質の折りたたみ運動等において、カオスとは違った異常ゆらぎが観測されており²⁾³⁾⁴⁾、これらはよどみ運動で説明できる可能性がある。

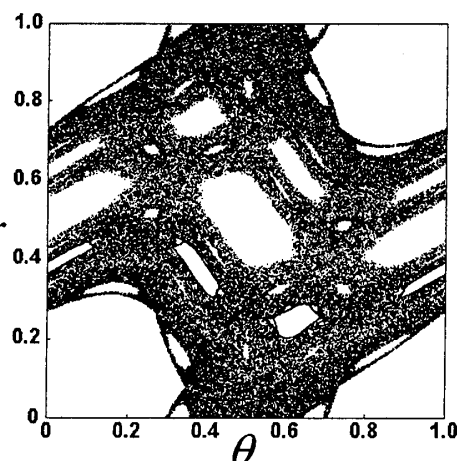
2. モデル

スタンダードマップは次の式で与えられる。

$$x_{i+1} = F(x_i),$$

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \theta_i \\ r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i + r_i - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_i \\ r_i - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_i \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (1)$$

ここで、運動の遷移が頻繁に観測できる程度の、 $k=1.2$ の場合について調べた。このときの位相空間は図 1 であり、KAM トーラスは存在しない。

図 1. 位相空間 ($k=1.2$)

3. 解析

局所リヤプノフ指数 λ_i のくりこみ不変な分布を決定する。局所リヤプノフ指数を n 個ずつ足し合わされた局所拡大率 $\hat{\lambda}_{i,j}$ を次のように定義する。

$$\lambda_i \equiv \log \frac{\|\delta x_{i+1}\|}{\|\delta x_i\|}, \quad \delta x_i \equiv (\delta\theta_i, \delta r_i) \text{ (接ベクトル)} \quad (2)$$

$$\hat{\lambda}_{j,n} \equiv \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} \lambda_i \quad (3)$$

くりこまれた局所リヤプノフ指数の分布 $f(\lambda)$ を

$$f(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta \left(\frac{\hat{\lambda}_{j,n} - m \cdot n}{n^{1/\alpha}} - \lambda \right) \quad (4)$$

¹ E-mail: kunitoshi@phys.cst.nihon-u.ac.jp

² E-mail: ippei@sakura.email.ne.jp

とするとき、これが $n \rightarrow \infty$ でレヴィ分布に収束すると仮定すると、特性関数は

$$\exp[|k|^\alpha \{-C_{\text{odd}} + i \operatorname{sign}(k) C_{\text{even}}\}] \quad (5)$$

に収束する。よって、 $\hat{\lambda}_{j,i}$ の特性関数 $\hat{f}(k)$ は、

$$\hat{f}(k) = \exp[-i k m n] \exp[n|k|^\alpha (-C_{\text{odd}} + i \operatorname{sign}(k) C_{\text{even}})] \quad (6)$$

となる。このことから、

$$-\log|\hat{f}(k)| \approx C_{\text{odd}} n |k|^\alpha \quad (7)$$

となる。図 2 は $n = 10^5, 10^6, 10^7$ の場合について数値計算によって求めた $-\log|\hat{f}(k)|$ である。直線は $C_{\text{odd}} n |k|^\alpha$, ($\alpha = 1.45, C_{\text{odd}} = 1/12$) である。

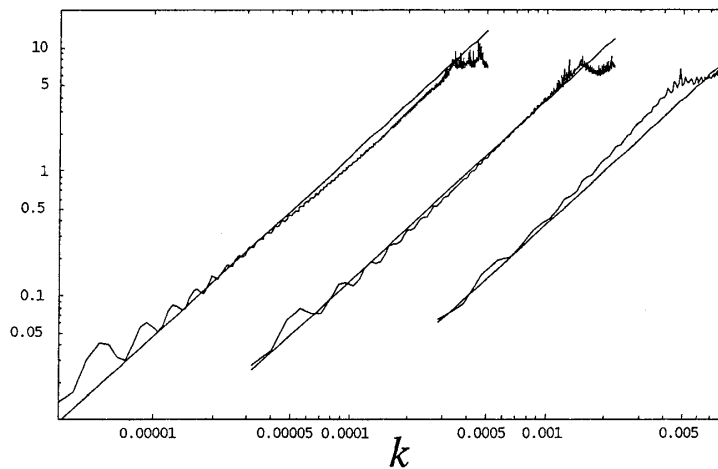


図 2. $-\log|\hat{f}(k)|$

4. まとめ

局所リヤプノフ指数のゆらぎの分布関数が、くりこみの極限で $\alpha \approx 1.45$ のレヴィ分布になることがわかった。図 2 を詳細に見ると、直線からの系統的なずれが見られる。これはより精度の高い計算で改善されると考えられる。また、 $1 < \alpha < 2$ であり、このことは平均値すなわち最大リヤプノフ指数が存在することを意味する。ただし、リヤプノフ指数のゆらぎの 2 次モーメントは発散する。今後は、臨界点近傍や結合系でのゆらぎの性質も調べてみる必要がある。

著者（島田）は本研究に対し、文部科学省私立大学学術高度化推進事業、日本大学学術フロンティア推進事業「認知・記憶・行動の脳内メカニズム」の援助を受けた。

1) G.M.Zaslavsky: *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (Imperial College Press, New York, 1998).

2) 柳川一貴 「短い時間での株価変動を起こす要因」日本大学大学院理工学研究科修士論文 1997 年 3 月.

3) 福島敦史 「ゲノム情報の統計学的解析」日本大学大学院理工学研究科修士論文 2000 年 3 月.

4) N. Nakagawa & K. Kaneko: *Journal of the Physical Society of Japan* 69-5(2000) pp.1255-1258.